

# **Komplexe Zahlen**

Bernd Fiedler

Mathematik I für Informatiker  
Studiengang BENG–TKI–2007K,  
SG07/3\_2

Teletutoring 7. November 2007

Hochschule für Telekommunikation  
Leipzig

## Arithmetische Form

$$\boxed{z = a + j \cdot b} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a := \operatorname{Re} z$$

$$b := \operatorname{Im} z$$

$$j \text{ imaginäre Einheit, } j^2 = -1$$

Konjugiert komplexe Zahl zu  $z = a + j \cdot b \in \mathbb{C}$ :

$$\bar{z} := a - j \cdot b$$

# Goniometrische Form, Exponentialform, Versorform

Geg.:  $z = a + j \cdot b$

$$z = r \cdot (\cos \phi + j \cdot \sin \phi)$$

$$r := |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

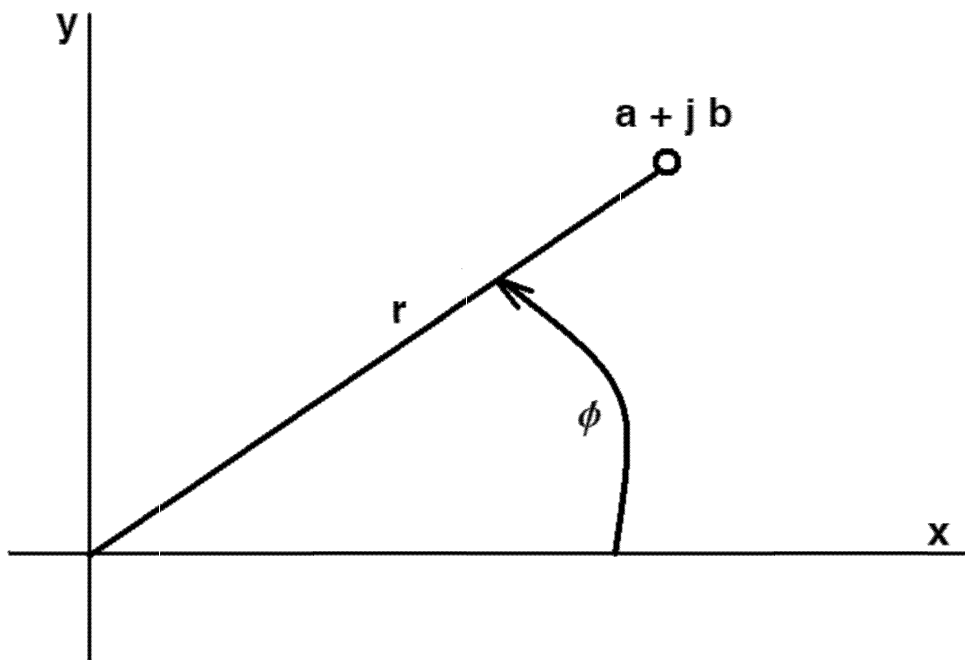
$$\phi = \arg z, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$z = r \cdot e^{j \cdot \phi}$$

$$z = r \angle \phi$$

Es gilt:

$$e^{j \cdot \phi} = \cos \phi + j \cdot \sin \phi$$



## Berechnung von $\phi = \arg(a + j \cdot b)$

A) Sei  $a = 0$ :

$$\Rightarrow \phi = \begin{cases} \pi/2 & \text{falls } b > 0 \\ \text{nicht def.} & \text{falls } b = 0 \\ 3\pi/2 & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

B) Sei  $a \neq 0$ :

Bilde  $\alpha := \arctan \frac{|b|}{|a|} \Rightarrow 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \phi = \begin{cases} \alpha & \text{falls } z \in \text{Quadrant I} \\ \pi - \alpha & \text{falls } z \in \text{Quadrant II} \\ \pi + \alpha & \text{falls } z \in \text{Quadrant III} \\ 2\pi - \alpha & \text{falls } z \in \text{Quadrant IV} \end{cases}$$

## Die vier Grundrechenarten

### Addition:

$$(a + j \cdot b) + (c + j \cdot d) = (a + c) + j \cdot (b + d)$$

(wie bei Vektoren)

### Subtraktion:

$$(a + j \cdot b) - (c + j \cdot d) = (a - c) + j \cdot (b - d)$$

(wie bei Vektoren)

### Multiplikation:

$$(a + j \cdot b) \cdot (c + j \cdot d) = (ac - bd) + j \cdot (ad + bc)$$

(Ausmultiplizieren;  $j^2 = -1$ )

### Division:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \dots$$

(Reellmachen des Nenners)

## Potenzieren

$$z = r \cdot e^{j \cdot \phi} \in \mathbb{C}, z \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z^n := (r \cdot e^{j \cdot \phi})^n}$$

Nun Potenzgesetze anwenden

$$\Rightarrow z^n := r^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \phi}$$

Ferner:

$$\boxed{z^0 := 1}$$

$$\boxed{z^{-n} := 1/(z^n)}$$

## Radizieren

$$z = r \cdot e^{j \cdot \phi} \in \mathbb{C}, z \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$\text{Schreibe: } z = r \cdot e^{j \cdot (\phi + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sqrt[n]{z} := r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{j \cdot \frac{\phi + 2k\pi}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{j \cdot (\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}}$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1$$

## Logarithmieren

$$z = r \cdot e^{j \cdot \phi} \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

$$\text{Schreibe: } z = r \cdot e^{j \cdot (\phi + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\ln(z) := \ln(r) + j \cdot (\phi + 2k\pi)}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$



## Beispiel I:

$$z = 4 - 3j, \quad \sqrt[3]{4 - 3j} = ?$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha = \arctan \frac{3}{4} = 36,86990^\circ$$

$z$  liegt in Quadrant IV

$$\Rightarrow \phi = 360^\circ - \alpha = 323,13010^\circ$$

$$\Rightarrow z = 5 \cdot e^{j \cdot (323,13010^\circ + k \cdot 360^\circ)}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{5} \cdot e^{j \cdot \frac{323,13010^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{5} \cdot e^{j \cdot (107,71003^\circ + k \cdot 120^\circ)}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} = 1,70998 \cdot e^{j \cdot (107,71003^\circ + k \cdot 120^\circ)}$$

$$k = 0, 1, 2$$

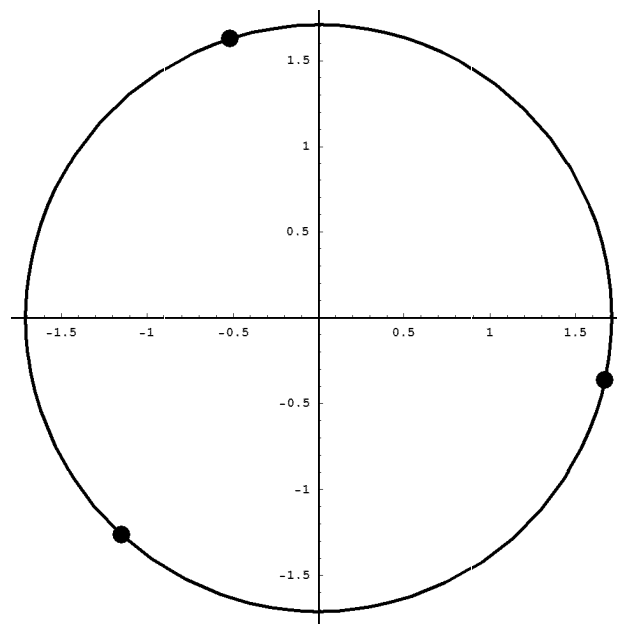
Für Zeichnung Winkeltabelle

$k$	$\phi$
0	107,71003
1	227,71003
2	347,71003

## Grafik der 3 Wurzeln $\sqrt[3]{4 - 3j}$

$$\rho = \sqrt[3]{5} = 1,70998$$

$k$	$\phi$
0	107,71003
1	227,71003
2	347,71003



## Beispiel II:

$$z = 4 - 3j, \quad \ln(4 - 3j) = ?$$

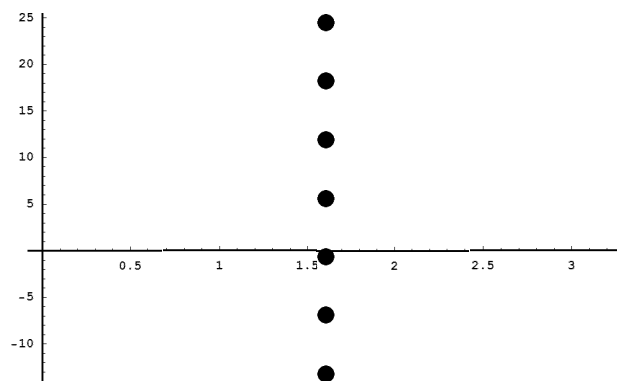
Es war

$$\Rightarrow z = 5 \cdot e^{j \cdot (323,13010^\circ + k \cdot 360^\circ)}$$

$$\Rightarrow z = 5 \cdot e^{j \cdot (5,63968 + k \cdot 2\pi)}$$

$$\Rightarrow \ln(z) = \ln(5) + j \cdot (5,63968 + k \cdot 2\pi)$$

$$\Rightarrow \ln(z) = 1,60944 + j \cdot (5,63968 + k \cdot 6,28319)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$



**Was gilt in  $\mathbb{C}$  gegenüber  $\mathbb{R}$  nicht mehr?**

**Ordnungsrelation:**

In  $\mathbb{C}$  ist keine Relation " $<$ " oder " $\leq$ " definiert.

**Potenzgesetze:**

In  $\mathbb{C}$  gelten die Regeln

$$z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta} \quad (1)$$

$$z_1^\alpha \cdot z_2^\alpha = (z_1 \cdot z_2)^\alpha \quad (2)$$

$$(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha \cdot \beta} \quad (3)$$

für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  im allgemeinen **NICHT** mehr.

Nur für  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  sind (1), (2), (3) weiterhin uneingeschränkt gültig.

## Beispiel

Für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt  $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha \cdot \beta}$  im allgemeinen nicht mehr.

Wir untersuchen als Beispiel, ob die Relation

$$\left((-1)^3\right)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{3 \cdot \frac{1}{3}} \quad (4)$$

gültig ist.

Rechte Seite von (4):

$$(-1)^{3 \cdot \frac{1}{3}} = (-1)^1 = -1$$

Linke Seite von (4):

$$\left((-1)^3\right)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$$

Wir berechnen diese 3-te Wurzel.

$$-1 = e^{j \cdot \pi} = e^{j \cdot (\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{-1} = e^{j \cdot (\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2$$

Linke Seite von (4)  $\Rightarrow$  3 Zahlen

Rechte Seite von (4)  $\Rightarrow$  1 Zahl

$$\Rightarrow \left((-1)^3\right)^{\frac{1}{3}} \neq (-1)^{3 \cdot \frac{1}{3}}.$$

## Potenzgesetze bezüglich ganzer Exponenten

Für  $m \in \mathbb{Z}, m > 0$  und  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} z^m &:= \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_m \\ z^0 &:= 1 \quad (z \neq 0) \\ z^{-m} &:= \frac{1}{z^m} \quad (z \neq 0) \end{aligned}$$

Ferner gilt für  $k, m \in \mathbb{Z}$  und  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} z^k \cdot z^m &= z^{(k+m)} \\ (z_1)^k \cdot (z_2)^k &= (z_1 \cdot z_2)^k \\ (z^k)^m &= z^{k \cdot m} \\ \frac{z^k}{z^m} &= z^{k-m} \\ \frac{(z_1)^k}{(z_2)^k} &= \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^k \end{aligned}$$

$z, z_1, z_2$  dürfen nicht Null sein, wenn sichtbar oder versteckt durch diese Zahlen dividiert wird.

## Was können wir handhaben?

- Die 4 Formen komplexer Zahlen
- Betrag, Radius, Argument,  
konjugiert komplexe Zahl
- Vier Grundrechenarten
- Potenzen (mit ganzem Exponenten)
- Radizieren
- Logarithmieren
- Potenzgesetze mit ganzen Exponenten

Potenzgesetze mit nichtganzem Exponenten $\Rightarrow$ Finger weg
---